# Temat: **WYBRANE ZAGADNIENIA WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW**

## Wprowadzenie

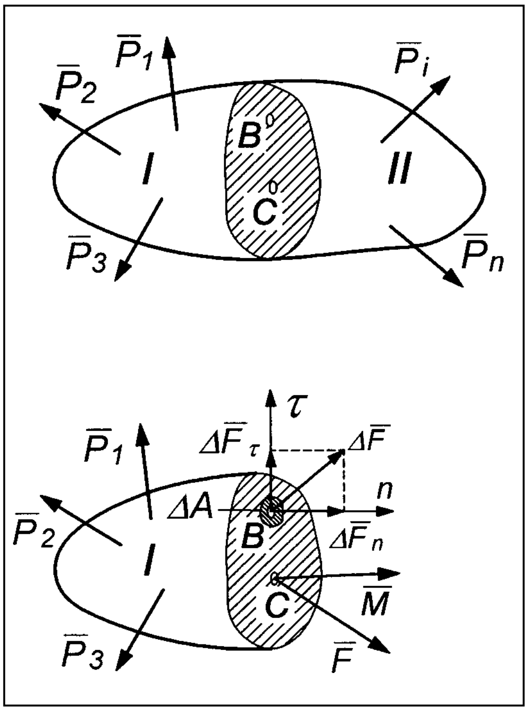
**Wytrzymałość materiałów** (stereomechanika techniczna) jest nauką o metodach obliczeń i projektowania konstrukcji odkształcalnych.
Do problemów wytrzymałości należy ustalanie **zależności między siłami działającymi na ciało odkształcalne (przyczynami) a odkształceniami tego ciała (skutkami**).
Efektem obliczeń jest taki dobór materiałów i wymiarów poszczególnych elementów konstrukcji, aby były zdolne do przeniesienia działających na nie obciążeń zewnętrznych z dostatecznym zapasem bezpieczeństwa.

### Związek przyczynowo-skutkowy między siłami zewnętrznymi, wewnętrznymi i odkształceniami

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Przyczyna**<br>Siły zewnętrzne działające na ciało odkształcalne | → | **Skutek pierwotny**<br>Powstanie sił wewnętrznych w elemencie (naprężeń) | → | **Skutek wtórny**<br>Powstanie odkształceń (zmian geometrycznych elementu) |

### WYZNACZANIE SIŁ WEWNĘTRZNYCH (NAPRĘŻEŃ)

Wyznaczanie sił wewnętrznych można przeprowadzić po przecięciu ciała i odrzuceniu jednego z elementów. Zachodzi wówczas równowaga układów sił zewnętrznych i sił wewnętrznych działających na analizowane elementy.




**Rys. 1**

$\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \ldots, \overline{P}_n$ **- obciążenie zewnętrzne**
$C$ – biegun redukcji sił wewnętrznych
$B$ – dowolny punkt

$A$ – całkowita powierzchnia przekroju
$\overline{M}$ - moment główny sił wewnętrznych
$\overline{F}$ - wektor główny sił wewnętrznych

Twierdzenie:

**Siły zewnętrzne są w równowadze z siłami wewnętrznymi działającymi na element I**

$\Delta A$ **-** element powierzchni, zawierający punkt $B$
$\Delta\overline{F}$ – elementarna siła działająca na powierzchnię $\Delta A$
$\Delta\overline{F}_n$ – składowa normalna elementarnej siły wewnętrznej
$\Delta\overline{F}_\tau$ – składowa styczna elementarnej siły wewnętrznej

## Definicje naprężeń w punkcie

Naprężenie normalne: $\sigma_n = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA}$

Naprężenie styczne: $\sigma_\tau = \tau = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_\tau}{\Delta A} = \frac{dF_\tau}{dA}$

Jeżeli rozkład elementarnych sił wewnętrznych jest równomierny, naprężenia liczymy ze wzorów:

$\boxed{\sigma_n = \frac{F_n}{A}}$ $\boxed{\sigma_\tau = \tau = \frac{F_\tau}{A}}$

**Jednostką naprężenia** w układzie SI jest **pascal (Pa):** $\boxed{1Pa = 1\frac{N}{m^2}}$

Stosuje się również jednostki:

$1MPa = 10^6 N/m^2 = 10^6 Pa$

$1KG/cm^2 = 9{,}81 \cdot 10^4 Pa$

$1KG/mm^2 = 9{,}81 \cdot 10^6 Pa$

---

**Zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami dla jednoosiowego rozciągania**

**PRAWO HOOKE'A.** Materiały pod wpływem obciążeń wydłużają się lub skracają proporcjonalnie do działającej siły o ile wartość siły nie przekroczy pewnej granicy (granicy proporcjonalności).

Prawo Hooke'a wyraża się wzorem: $\boxed{\Delta l = \frac{P \cdot l_o}{E \cdot A}}$

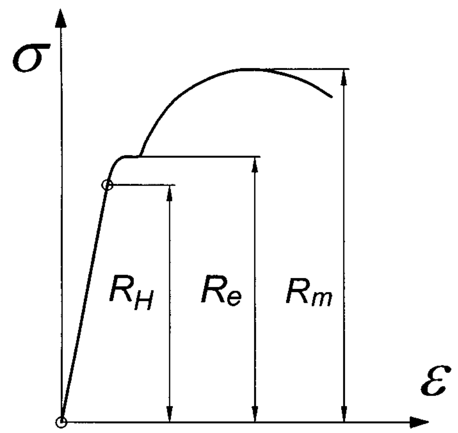
gdzie: $\Delta l$ - wydłużenie pręta [m],
$P$ - wartość działającej siły [N],
$l_o$ - początkowa długość pręta [m] (przed wydłużeniem),
$A$ - pole przekroju poprzecznego [$m^2$],
$E$ - moduł sprężystości wzdłużnej materiału (moduł Younga), wielkość stała dla danego materiału [MPa].

Jeżeli zapiszemy: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$ - wydłużenie jednostkowe,

oraz $\sigma = \frac{P}{A}$ - naprężenia normalne

wtedy: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ Można też zapisać: $\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$

Dobrą ilustracją prawa Hooke'a jest wykres rozciągania próbki stalowej w zakresie granicy proporcjonalności $R_H$




**Rys. 2**

$R_H$ – granica proporcjonalności (granica stosowania prawa Hooke'a),
$R_e$ – granica plastyczności,
$R_m$ – wytrzymałość na rozciąganie

Naprężenia określone symbolami $R_e$ *i* $R_m$ są naprężeniami niebezpiecznymi dla materiału ponieważ powodują trwałe, bezpowrotne odkształcenia próbki lub jej zerwanie.
Dlatego też po przyjęciu współczynnika bezpieczeństwa stanowią podstawę określenia tzw. naprężeń dopuszczalnych

**Ogólny warunek wytrzymałościowy** $\boxed{\sigma_{red} \le \sigma_{dop}}$

gdzie:
$\sigma_{red}$ - naprężenie zastępcze w danym punkcie wyznaczone na podstawie odpowiedniej hipotezy wytężenia,
$\sigma_{dop}$ - naprężenie dopuszczalne dla danego materiału i danego stanu naprężenia.

**Naprężenie dopuszczalne** $\sigma_{dop} = \dfrac{\sigma_{nieb}}{x}$

gdzie: $\sigma_{nieb}$ - naprężenie niebezpieczne dla danego materiału,

$x$ – współczynnik bezpieczeństwa , $x>1$

Współczynnik bezpieczeństwa określony ze względu na $R_e$ oznacza sie symbolem $x_e$, jeżeli natomiast określony jest ze względu na $R_m$ oznacza się symbolem $x_m$.

## TYPOWE PRZYPADKI WYTRZYMAŁOŚCIOWE DLA OBCIĄŻEŃ STATYCZNYCH

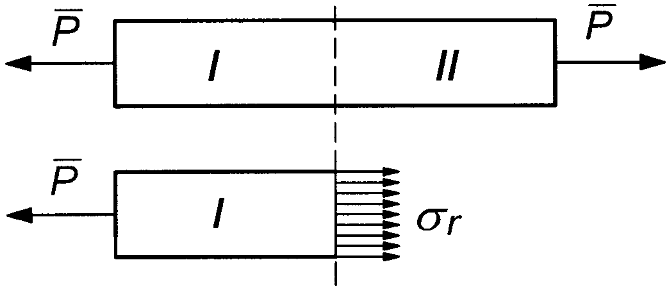
### I. Wytrzymałość prosta. Obciążenia statyczne

- rozciąganie i ściskanie
- ścinanie
- docisk powierzchniowy
- skręcanie
- zginanie,
- wyboczenie

### II. Wytrzymałość złożona. Obciążenia statyczne.

- zginanie i ściskanie (rozciąganie),
- zginanie i ścinanie,
- zginanie i skręcanie.

## ROZCIĄGANIE




**Rys. 3**

**Warunek wytrzymałościowy**

$$\sigma_r = \frac{P}{A} \le \sigma_{dop} = k_r$$

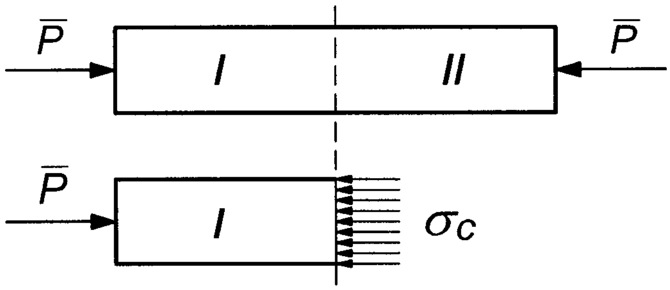
$\sigma_r$ - naprężenia rozciągające

$P$ - osiowa siła rozciągająca

$A$ - przekrój poprzeczny

$\sigma_{dop} = k_r$ - naprężenia dopuszczalne na rozciąganie

## ŚCISKANIE




**Rys. 4**

**Warunek wytrzymałościowy**

$$\sigma_c = \frac{P}{A} \le \sigma_{dop} = k_c$$

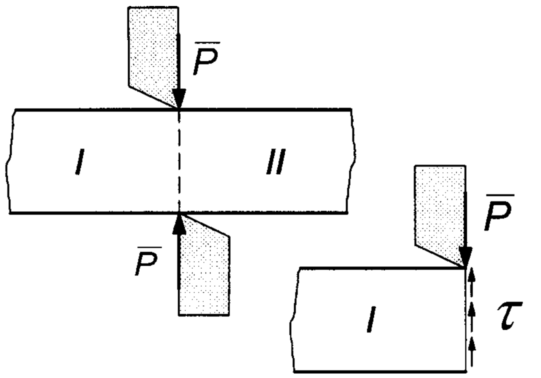
$\sigma_c$ - naprężenia ściskające

$P$ - osiowa siła ściskająca

$A$ - przekrój poprzeczny

$\sigma_{dop} = k_c$ - naprężenia dopuszczalne na ściskanie

## ŚCINANIE




**Rys. 5**

**Warunek wytrzymałościowy**

$$\tau = \sigma_\tau = \frac{P}{A} \le k_t$$

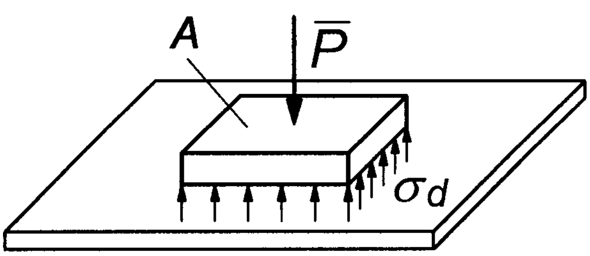
$\tau = \sigma_\tau$ - naprężenia ścinające

$P$ - siła poprzeczna tnąca

$A$ - przekrój poprzeczny

$k_t$ - naprężenia dopuszczalne na ścinanie

## DOCISK POWIERZCHNIOWY




**Rys. 6**

**Warunek wytrzymałościowy**

$$\sigma_d = \frac{P}{A} \le k_d$$

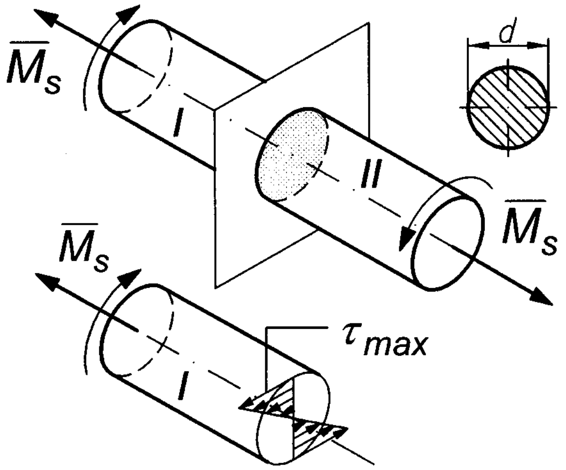
$\sigma_d$ - naprężenia między dociskanymi elementami (ciśnienie)

$P$ - siła docisku

$A$ - umowna powierzchnia docisku

$k_d$ - naprężenia dopuszczalne na docisk powierzchniowy

## SKRĘCANIE




**Warunek wytrzymałościowy**

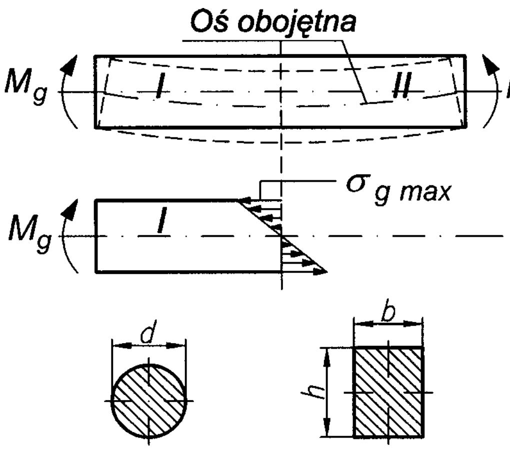
$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_o} \le k_s$$

$\tau_{max}$ - max naprężenie styczne skręcanego elementu
$M_s$ - moment skręcający
$W_o$ - wskaźnik wytrzymałości na skręcanie
$k_s$ - naprężenia dopuszczalne na skręcanie

**Rys. 7**

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie dla przekroju kołowego: $\boxed{W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0{,}2 \cdot d^3}$

## ZGINANIE




**Warunek wytrzymałościowy**

$$\sigma_{g\,max} = \frac{M_g}{W_g} \le k_g$$

$\sigma_{g\,max}$ - max naprężenie gnące (normalne) zginanego elementu
$M_g$ - moment zginający
$W_g$ - wskaźnik wytrzymałości na zginanie
$k_g$ - naprężenia dopuszczalne na zginanie

**Rys. 8**

Wskaźniki wytrzymałości na zginanie wynoszą odpowiednio:

dla przekroju kołowego: $\boxed{W_g = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0{,}1 \cdot d^3}$ dla przekroju prostokątnego: $\boxed{W_g = \frac{b \cdot h^2}{6}}$

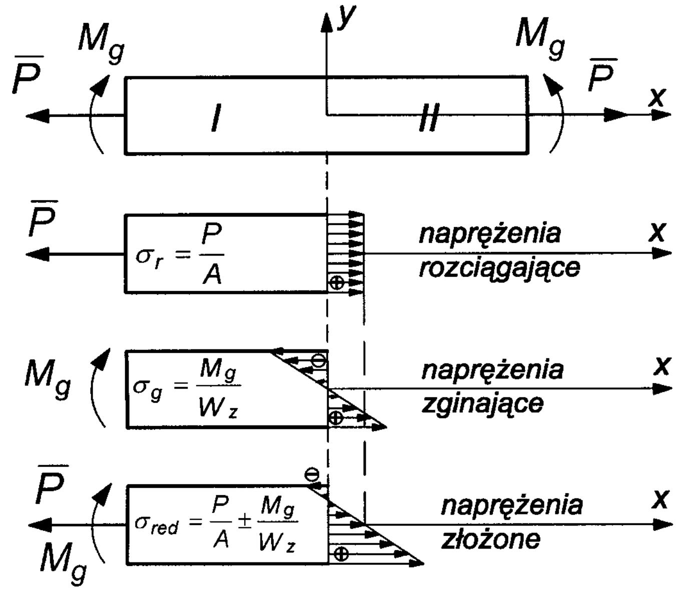
Tabela 1. Orientacyjne wartości naprężeń dopuszczalnych w Mpa

| Materiał | Rozciąganie | Zginanie | Skręcanie |
|---|---|---|---|
| | $k_r$ | $k_g$ | $k_s$ |
| Stal węglowa St5 | 130-150 | 160-185 | 78-90 |
| Stal niskostopowa 18G2 | 148-170 | 174-200 | 96-110 |
| Stop aluminium PA6 | 104-120 | 113-130 | 61-70 |

Uwaga: naprężenia $k_r$ obliczone zostały dla współ. bezpiecz. $x_e$ o wartościach 2 i 2,3.

# WYTRZYMAŁOŚĆ ZŁOŻONA. OBCIĄŻENIA STATYCZNE.

## ZGINANIE I ROZCIĄGANIE, (ŚCISKANIE)




Naprężenia zastępcze:

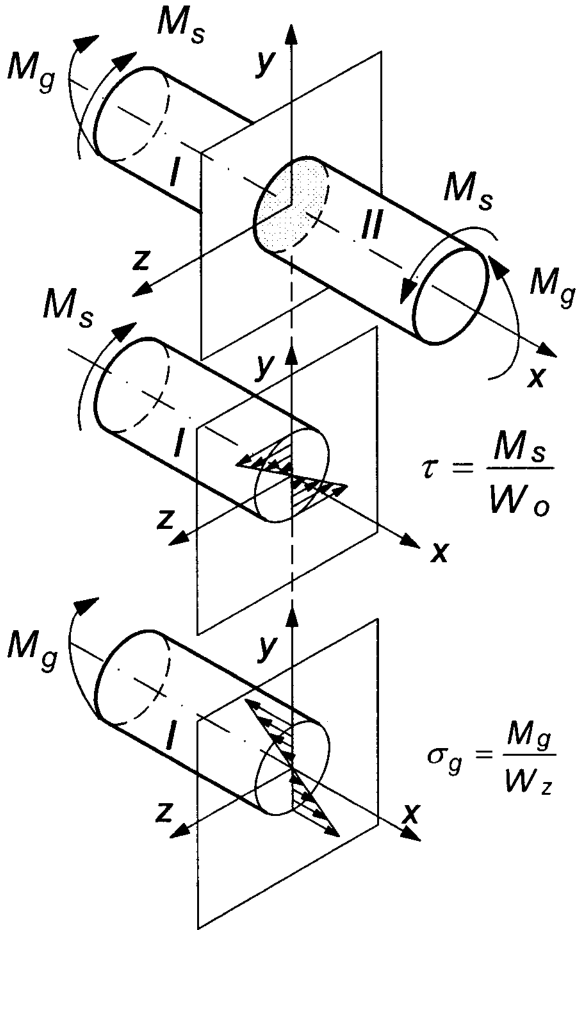
$$\boxed{\begin{gathered}\sigma_{red} = \sigma_r(\sigma_c) + \sigma_g \\ \sigma_{red} = \pm\frac{P}{A} \pm \frac{M_g}{W_g}\end{gathered}}$$

gdzie: $W_g = W_z$ - wskaźnik wytrzymałości na zginanie

$$\sigma_{red} \leq k_r(k_c)$$

**Rys. 9**

## ZGINANIE I SKRĘCANIE




W przekroju poprzecznym występuje równocześnie:
moment zginający: $M_g$
moment skręcający: $M_s$
Ponieważ mamy do czynienia ze złożonym stanem naprężeń, ocenę stopnia wytężenia materiału należy oprzeć na odpowiedniej hipotezie wytrzymałościowej.
Dla materiałów plastycznych np. stale walcowane, kute stopy miedzi i aluminium naprężenia zredukowane można obliczyć wg wzorów:

1) hipoteza $\tau_{max}$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_g^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq k_r$$

2) hipoteza **Hubera**

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_g^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq k_r$$

**Rys. 10**

W przypadku zginania ze skręcaniem wzory na naprężenia zredukowane można wyrazić jako funkcję momentów gnącego $M_g$ i skręcającego $M_s$.

Przy zastosowaniu **hipotezy Hubera:**

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_s}{W_o}\right)^2} \le k_r$$

Dla przekroju **kołowego** zachodzi : $W_o = 2W_z$ (patrz strona 5), otrzymamy:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_s}{2 \cdot W_z}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W_z}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{M_s}{W_z}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_g^2 + 0{,}75\,M_s^2}}{W_z} \le k_r$$

po wprowadzeniu pojęcia tzw. momentu zastępczego: $M_{red} = \sqrt{M_g^2 + 0{,}75\,M_s^2}$ , naprężenia

zredukowane: $\sigma_{red} = \dfrac{M_{red}}{W_z} \le k_r$, ponieważ $W_z = \dfrac{\pi}{32} d^3$,

wymaganą średnicę wału pełnego obliczymy ze wzoru: $d \ge \sqrt[3]{\dfrac{32\,M_{red}}{\pi\,k_r}}$

---

**Przykład 1**

Obliczyć średnicę pręta rozciąganego sił osiową P=20 kN.
Pręt wykonany jest ze stali St 5.

Rozwiązanie

Warunek wytrzymałościowy: $\sigma_r = \dfrac{P}{A} \le \sigma_{dop} = k_r$ , przekrój pręta wynosi: $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$

Z warunku wytrzymałościowego otrzymamy: $\dfrac{4P}{\pi \cdot d^2} \le k_r$ oraz $d \ge \sqrt{\dfrac{4P}{\pi \cdot k_r}}$

*Wartość $k_r$ dla stali St 5 obliczamy na podstawie $R_m$ lub $R_e$ zakładając współczynnik bezpieczeństwa lub przyjmujemy gotowe wartości na podstawie tablic z Poradnika Mechanika.*
*$R_m, R_e$ - również znajdujemy w tablicach własności mechanicznych materiałów w Poradniku Mechanika.*

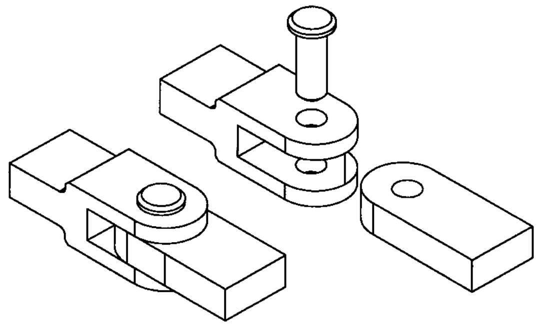
Przyjmując do obliczeń dolną wartość $k_r$ =130 MPa ( Tabl. 1 str. 5), obliczymy wymaganą średnice rozciąganego pręta.

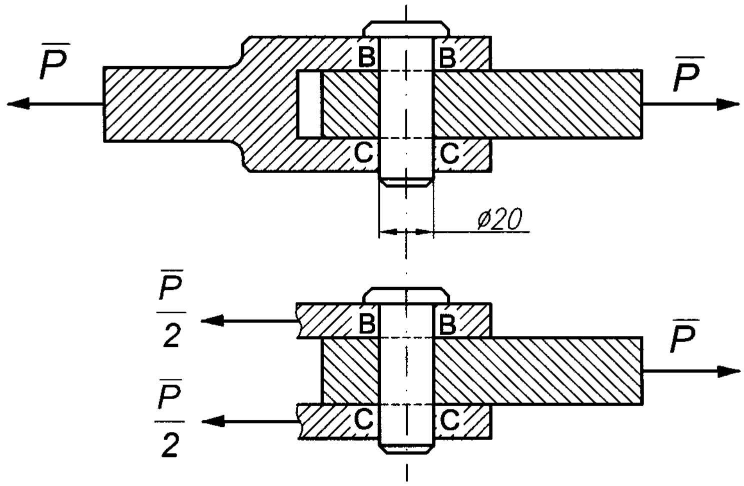
$$d \ge \sqrt{\frac{4 \cdot 20 \cdot 10^3}{\pi \cdot 130 \cdot 10^6}} = 0{,}01399 \cong 0{,}014m = 14mm$$

Do wykonania konstrukcji można przyjąć pręt o średnicy 14 mm lub większej z tablic wyrobów hutniczych.

**Przykład 2**

Sprawdzić naprężenia ścinające w połączeniu sworzniowym wykonanym ze stali St3, jeżeli siła obciążająca złącze wynosi 10000 N, średnica sworznia wynosi 20 mm, natomiast naprężenia dopuszczalne na ścinanie $k_t = 54\ MPa$ **.**






**Rys. 11**

Naprężenia ścinające występują w dwóch przekrojach połączenia B-B oraz C-C.
Jeżeli założyć symetrię obciążenia to płaskownik górny i dolny przenoszą połowę siły przyłożonej do złącza.

Zatem siła tnąca występująca w jednym przekroju wyniesie: $T = \frac{P}{2}$

Zakładając równomierny rozkład naprężeń w każdym przekroju kołowym sworznia otrzymamy naprężenia ścinające:

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{4P}{2\pi d^2},$$

po podstawieniu wartości liczbowych jest:

$$\tau = \frac{4 \cdot 10000}{2\pi\, 0{,}02^2} = 15915494{,}3 Pa \cong 16\, MPa < k_t = 54\, MPa$$

Obliczenia wykazały, że złącze spełnia warunek wytrzymałości na ścinanie z dużym zapasem bezpieczeństwa.

*W celu uzyskania pewności bezpiecznej pracy połączenia należałoby ponadto sprawdzić sworzeń na zginanie, naciski powierzchniowe oraz sprawdzić naprężenia rozrywające w niebezpiecznych przekrojach płaskowników.*

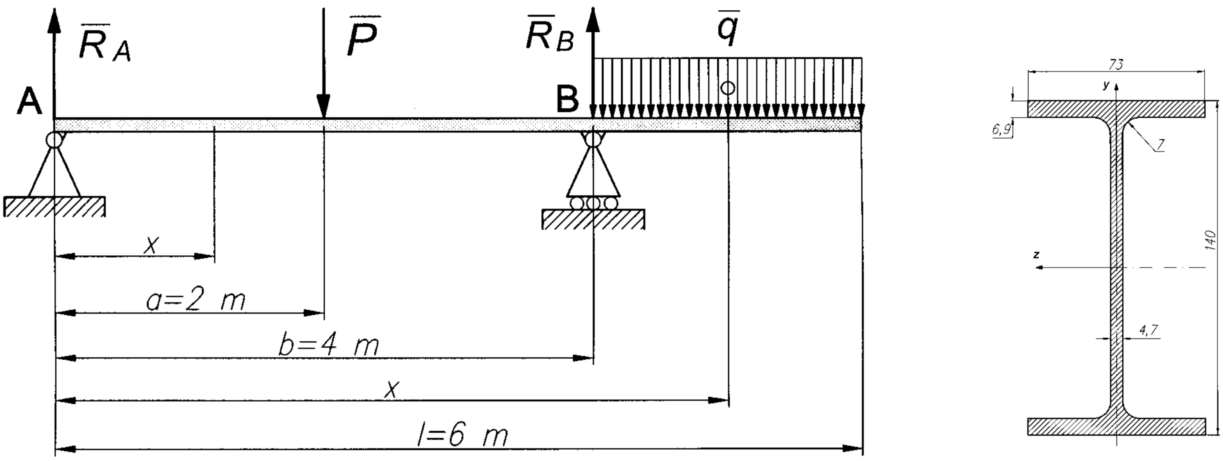
**Przykład 3**

Przeprowadzić analizę wytrzymałościową belki prostej dwupodporowej o jednorodnym przekroju dwuteownika 140PE (wymiary na rys.12), wykonanej ze stali 18G2 , obciążonej siłą skupioną ***P*** i obciążeniem ciągłym ***q*** jak na rys. 12.

Dane*: $l=6\ m$, $a=2\ m$, $b=4\ m$, $P=10\ kN$, $q=2\ kN/m$, $W_z=77{,}3\ cm^3$, $k_g=174\ MPa$*

W ramach analizy wytrzymałościowej belki należy:

1. obliczyć reakcje w podporach A i B,
2. przebieg momentu gnącego $M_g(x)$,
3. określić przebieg siły tnącej $T(x)$,
4. wskazać wartość maksymalną momentu gnącego,
5. sprawdzić naprężenia gnące $\sigma_g$.




**Rys. 12**

Ad 1). Reakcje w podporach $R_A, R_A$ wyznaczamy na podstawie warunków równowagi belki.

$$-R_A \cdot b + P \cdot (b-a) - \frac{q\,(l-b)^2}{2} = 0$$

$$R_B \cdot b - P \cdot a - q(l-b)\frac{l+b}{2} = 0$$

$$R_A = \frac{P \cdot (b-a)}{b} - \frac{q(l-b)^2}{2b} = 0$$

$$R_B = P\frac{a}{b} + \frac{q(l-b)(l+b)}{2b} = 0$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:

$$R_A = 4\ kN$$
$$R_B = 10\ kN$$

Ad 2). Przebieg momentu gnącego określimy przesuwając się wraz z myślowym przekrojem poprzecznym od lewego do prawego końca belki lub odwrotnie.

***Moment gnący*** *$M_g$ w dowolnym przekroju poprzecznym belki jest równy sumie algebraicznej momentów wszystkich sił działających na część belki odciętą tym przekrojem względem jego środka ciężkości.*

Ad 3). Przebieg sił tnących określimy przesuwając się wraz z myślowym przekrojem poprzecznym od lewego do prawego końca belki lub odwrotnie.

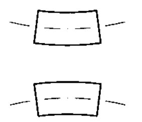
***Siła tnąca** T w dowolnym przekroju belki jest równa sumie współrzędnych wszystkich sił działających na część belki odciętą tym przekrojem na kierunku prostopadłym do osi belki.*

*Między momentem gnącym, siłą tnącą i obciążeniem ciągłym zachodzą związki :*

$$\frac{dM_g}{dx} = T\,, \quad \frac{dT}{dx} = -q\,, \quad \frac{d^2M_g}{dx^2} = -q$$

*Związki te można wykorzystać przy sprawdzeniu poprawności zapisu i wykresów momentów gnących i sił tnących.*

**Tablica 2**

| Wielkość | Schemat | Znak | Dla zwrotu siły ze strony przekroju: Lewej | Prawej |
|---|---|---|---|---|
| $M_g$ |  | + | ↑ | ↑ |
| | | — | ↓ | ↓ |
| $T$ | ↑□↓ | + | ↑ | ↓ |
| | ↓□↑ | — | ↓ | ↑ |
| $N$ | ←□→ | + | ← | → |
| | →□← | — | → | ← |

*Uwaga: W celu analitycznego zapisu momentów gnących i sił tnących i następnie ich prezentacji graficznej, przyjęte zostały reguły określania znaków momentów gnących, sił tnących. Reguły te przedstawia Tablica 2.*

Równania momentów gnących i sił tnących analizowanej belki zostały przedstawione w Tablicy 3, natomiast wykresy momentów gnących i sił tnących przedstawia rys. 13.

Ad 4). Maksymalna wartość momentu zginającego wynosi $M_{g\,max} = 8\,kN \cdot m = 8000\;N \cdot m$ ( na podstawie wykresu rys. 13)

Ad 5). Sprawdzenie naprężeń gnących w belce:

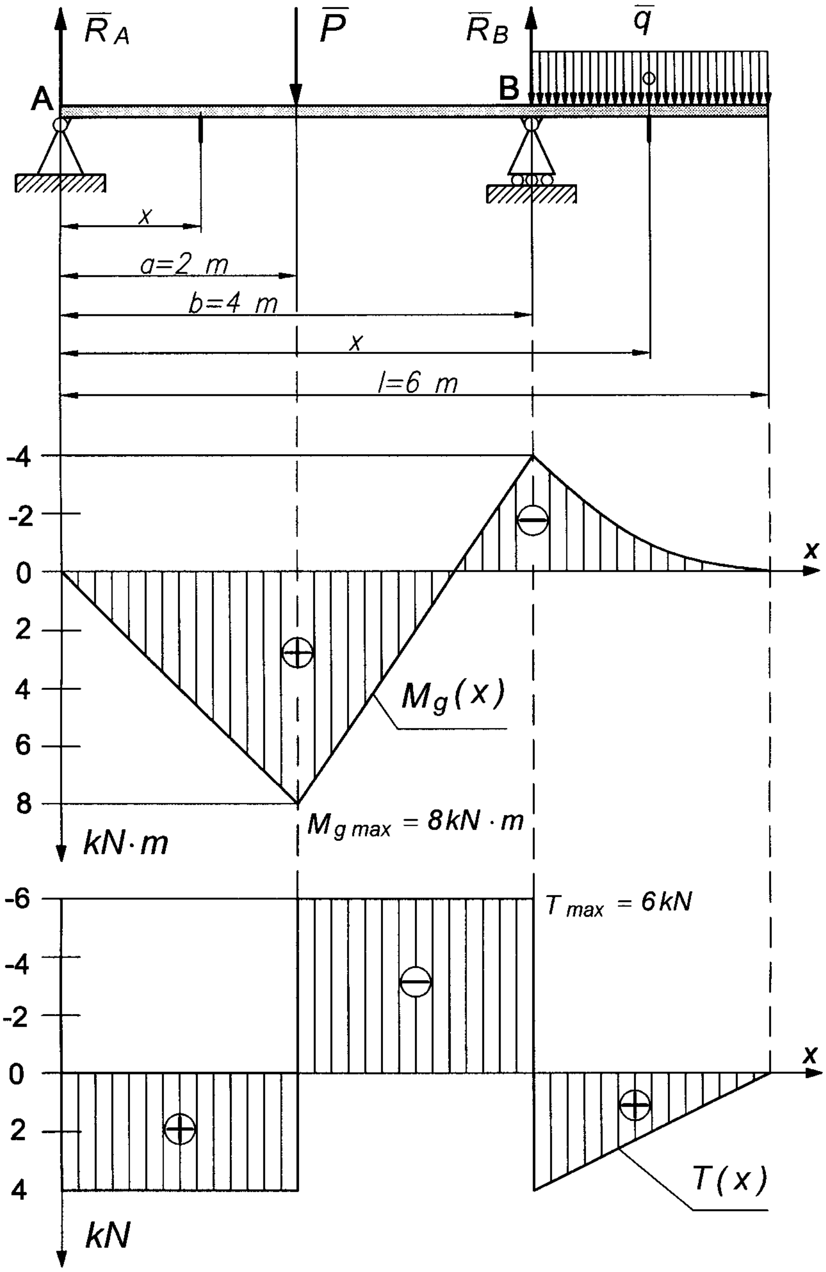
$W_z$=77,3 $cm^3$, $k_g$=174 MPa

$$\sigma_{g\,max} = \frac{M_{g\,max}}{W_z} = \frac{8000}{77{,}3 \cdot 10^{-6}} \cong 103{,}5 \cdot 10^6\,Pa = 103{,}5\;MPa < k_g$$

Przekrój belki spełnia warunek wytrzymałości na zginanie.

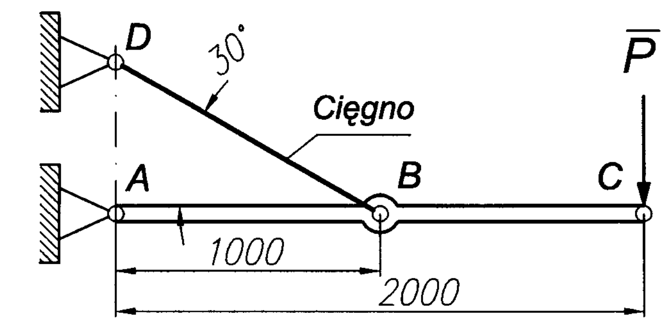
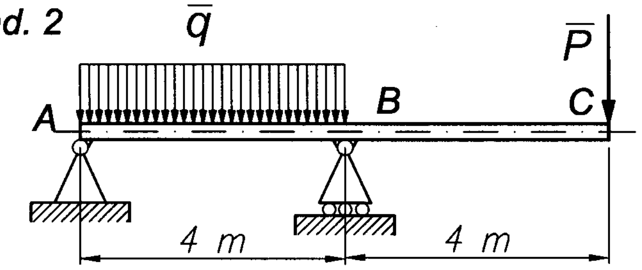
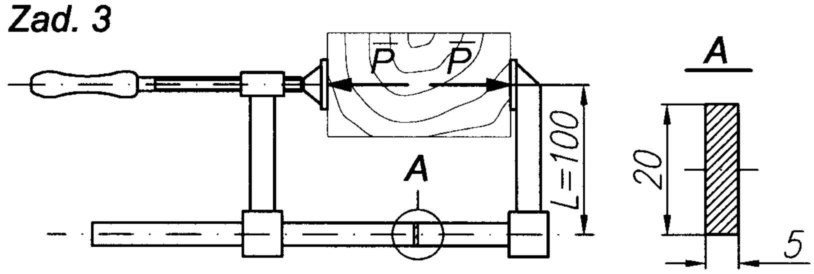
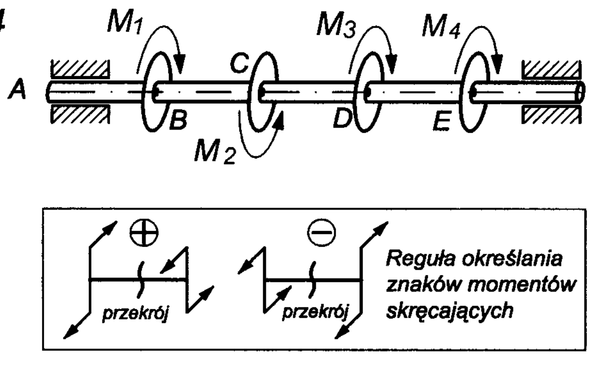
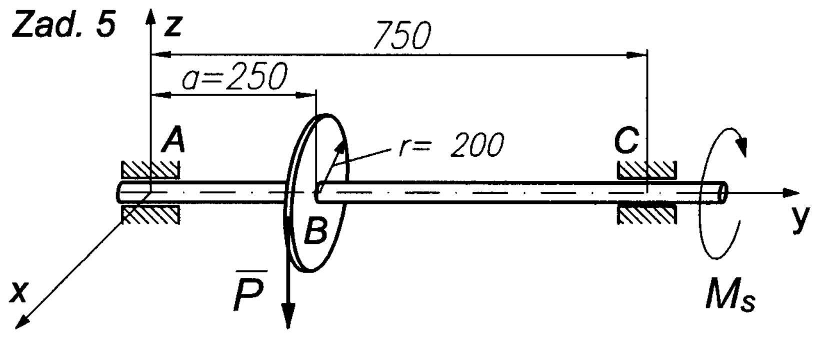
**Tablica 3**

| Przedział x | Moment gnący $M_g$ | Siła tnąca $T$ |
|---|---|---|
| $0 \le x < a$ | $M_g = R_A \cdot x$ | $T = R_A$ |
| $a \le x < b$ | $M_g = R_A \cdot x - P(x-a)$ | $T = R_A - P$ |
| $b \le x < l$ | $M_g = R_A \cdot x - P(x-a) + R_B(x-b) - \frac{q(x-b)^2}{2}$ | $T = R_A - P + R_B - q(x-b)$ |




**Rys. 13**

## ZADANIA DO ROZWIĄZANIA NA ĆWICZENIACH

| | |
|---|---|
| *Zad. 1*   | ***Dane:*** ***wymiary jak na rysunku oraz obciążenie końca belki*** $P = 10\ kN$<br><br>***Obliczyć:*** ***przekrój poprzeczny cięgna, jeżeli naprężenie dopuszczalne materiału cięgna na rozciąganie wynosi:*** $k_r = 100\ MPa$ |
| *Zad. 2*   | ***Dane:*** ***wymiary belki jak na rysunku oraz jej obciążenie:***<br>$q = 1\ kN/m$<br>$P = 2\ kN$<br>***Wykreślić przebiegi momentów gnących oraz sił tnących*** |
| *Zad. 3*   | ***Dane:*** ***wymiary mechanizmu jak na rysunku oraz obciążenie:***<br>$P = 1\ kN$<br>***Określić naprężenia normalne w skrajnych włóknach przekroju A*** |
| *Zad. 4*   | ***Dane:*** ***wartości momentów skręcających i naprężenia dopuszczalne na skręcanie:***<br>$M_1 = 200\ Nm,\ M_2 = 450\ Nm$<br>$M_3 = 150\ Nm,\ M_4 = 100\ Nm$<br>$k_s = 65\ MPa$<br>***Narysować wykres momentu skręcającego i obliczyć minimalną średnicę wałka*** |
| *Zad. 5*   | ***Dane:*** ***wymiary mechanizmu jak na rysunku oraz obciążenie:***<br>$P = 40\ N$<br>***Obliczyć:*** ***średnicę wału pełnego jeżeli :***<br>$k_r = 80\ MPa$<br>***Zastosować hipotezę Hubera*** |